

DOSSIERS

Le démantèlement des centrales nucléaires

MEA'2015
MORE ELECTRIC AIRCRAFT

Des avions plus électriques

L'ARTICLE **INVITÉ**

**La lutte contre le réchauffement
climatique passe par la prise en compte
d'un prix du carbone**

Par Jacques Percebois



nos téléphones portables. La *navigation* est la science et l'ensemble des techniques qui permettent à un mobile (aérien, terrestre, ou maritime) de calculer sa position, ou plus généralement toute information relative à son déplacement (quelle est ma vitesse, où est le Nord ?). Aujourd'hui, la navigation pédestre et la navigation des voitures autonomes constituent des défis technologiques qui seront relevés grâce à la formidable explosion d'une myriade de petits capteurs de bas coût tels que caméras, capteurs inertiels et magnétomètres MEMS (Micro Electro-Mechanical System) dont les informations permettent de pallier les insuffisances du GPS.

On peut dire que la navigation moderne a connu un tournant avec la conquête de l'espace dans les années 60 et le *filtre de Kalman*, outil qui a valu à Rudolf Kalman le prix Draper, considéré comme le « prix Nobel » de l'ingénierie. Inventé en 1960, ce filtre a été appliqué à la navigation des capsules Apollo, dont l'objet était d'aller sur la Lune et d'en revenir, avec pour enjeu majeur de préserver les vies des astronautes à bord. Le filtre permet, à partir divers capteurs à bord, surtout les capteurs inertiels, d'estimer la position et la trajectoire de la capsule, d'attribuer un degré de confiance à ces estimations et de filtrer le bruit des capteurs (d'où la terminologie).

Pour pouvoir exposer nos contributions propres, il nous faut cependant être un peu plus précis techniquement : le filtre de Kalman est un outil dédié aux systèmes linéaires ; la navigation utilise en réalité des filtres de Kalman *étendus* (EKF) ce qui consiste à utiliser un filtre de Kalman basé sur des approximations linéaires des petites perturbations des trajectoires nominales de la capsule. L'EKF a été développé conjointement par Rudolf Kalman, et Stanley Schmidt, le directeur de l'époque du Ames Research Center de la NASA. Il a notamment été alors vérifié en simulation que ces approximations linéaires étaient acceptables dans les conditions de vol d'Apollo.

En France, voyant l'essor de l'automatique moderne et de la navigation, le sous-directeur de l'École des mines de Paris, Pierre Laffitte, demande en 1964 à un élève particulièrement brillant, Pierre Faure, d'aller étudier l'automatique avec Rudolf Kalman aux États-Unis. Après une thèse sous la direction de ce dernier, Pierre Faure revient en France et fonde à Fontainebleau le Centre d'automatique dont les laboratoires de l'École des mines actuels, le Centre automatique et systèmes et le Centre de robotique, sont des émanations. Il rejoint en 1972 la SAGEM, qui produit des systèmes de navigation, et donne à cette entreprise un avantage concurrentiel important, du fait

Filtrage non-linéaire pour la navigation inertielle

SILVÈRE BONNABEL.

ENSEIGNANT-CHERCHEUR À MINES PARISTECH

PRIX BRILLOUIN-GLAVIEUX 2015 DÉCERNÉ PAR L'IEEE
ET LA SEE

Le **Prix Brillouin-Glavieux** est décerné conjointement par l'IEEE et la SEE. Il a pour but de promouvoir l'interaction entre recherche fondamentale, enseignement supérieur et industrie et de contribuer ainsi au triangle de la connaissance : sciences, technologie et innovation.

L'homme a déployé des trésors de créativité et d'ingéniosité pour voyager à travers les terres et les mers sans se perdre, depuis le chariot pointant vers le Sud inventé par les chinois il y a des millénaires, jusqu'au GPS (Global Positioning System) qui équipe désormais

notamment de sa connaissance parfaite du filtrage de Kalman. Il dirigea l'entreprise de 1988 jusqu'à sa mort en 2001.

L'alignement, un exemple d'application du filtre de Kalman à la navigation de haute précision

Une centrale inertielle est composée de gyromètres, qui mesurent les vitesses angulaires de la centrale, et d'accéléromètres qui mesurent des accélérations et la gravité. Quand on allume la centrale, par exemple parce qu'elle équipe un drone qui a été transporté d'un endroit à un autre, ou parce qu'une défaillance technique en vol exige un redémarrage, l'orientation de la centrale est totalement inconnue. L'estimation de l'orientation à l'allumage s'appelle *alignement*. On peut supposer la position connue ou mesurée par un GPS. Les accéléromètres sont sensibles à la gravité, ce qui permet de retrouver la verticale. Quant au cap, la présence de masses métalliques et courants électriques à bord interdit l'utilisation de boussole, du moins pour une estimation très précise. Cela dit, les gyromètres de haute précision sont capables de mesurer la rotation terrestre et cela permet d'estimer le cap (l'explication est ici volontairement un peu simplifiée).

Le filtrage de Kalman est indiqué pour l'alignement pour deux raisons : il permet d'estimer l'orientation efficacement et il permet aussi d'établir automatiquement des corrélations statistiques entre les diverses grandeurs du problème. Ces corrélations sont utiles pour propager instantanément par la suite des informations directement acquises sur une grandeur particulière, aux grandeurs qui lui sont corrélées. Cela dit, l'EKF, basé sur des approximations linéaires, n'est applicable que lorsque les erreurs d'estimation initiales sont faibles. Or ici, le cap initial est totalement inconnu. Le *logiciel commercial* procède par conséquent en deux phases : il commence par estimer grossièrement le cap, puis initialise un EKF avec cette première estimation, de sorte que l'erreur initiale d'estimation de l'EKF soit effectivement faible.

Pour le problème de l'alignement, Axel Barrau, alors doctorant dans le cadre d'une convention CIFRE entre SAGEM et Mines ParisTech, aujourd'hui ingénieur chez Safran, et moi-même avons proposé un EKF *non-linéaire modifié*, qui fonctionne même pour une erreur de cap initiale arbitrairement large. Notre solution permet de retrouver l'orientation, pour un niveau de précision donné, *quatre fois plus rapidement que le logiciel commercial*, ce temps gagné pouvant être précieux si la centrale est par exemple rallumée en vol. De plus, son architecture

basée sur une seule phase simplifiée considérablement sa validation industrielle. Notre algorithme est quasiment en tout point identique au filtre de Kalman étendu classique : il retient sa souplesse d'implémentation, sa facilité relative de réglage et son coût calculatoire raisonnable. La solution a fait l'objet de deux brevets.

Un filtre de Kalman étendu non-linéaire modifié

Le filtre développé conjointement avec SAGEM pour l'alignement s'appuie sur le filtre de Kalman dit « invariant », introduit dans la référence [1]. Ce dernier s'inspire d'idées, lancées par Pierre Rouchon et Philippe Martin de l'Ecole des mines au début des années 2000, sur la prise en compte des symétries pour la synthèse d'estimateurs de l'état d'un système dynamique. Dans la référence [2], les auteurs expliquent qu'un algorithme de parking automatique classique d'une voiture le long d'un trottoir peut tout à fait dépendre de l'orientation du trottoir, ce qui semble aberrant à tout ingénieur. En effet, si l'algorithme est plus efficace pour une orientation donnée, alors il convient de le « forcer » à fonctionner identiquement pour toute orientation, en faisant subir une rotation à ses réglages optimaux lorsque le trottoir est orienté différemment. L'algorithme de parking obtenu ainsi serait « invariant » par rotation (c-à-d indépendant de l'orientation du trottoir).

La façon concrète d'appliquer ces idées à un filtre de Kalman étendu est de modifier ses équations pour qu'il cherche en permanence à réduire l'erreur entre état vrai du système et état estimé, mais pour une définition d'erreur alternative, c-à-d une erreur invariante par certaines transformations. Dans l'exemple de la voiture, cela veut dire en simplifiant un peu, que les calculs du filtre de Kalman étendu doivent être écrits dans le repère de la voiture et non pas dans le repère lié au trottoir. Pour le filtre ainsi construit, seul l'écart de la voiture au trottoir compte, pas l'orientation de ce dernier.

Illustration des propriétés de notre filtre à travers un problème simplifié

Pour illustrer les bénéfices d'une approche par filtrage de Kalman invariant en navigation haute précision, nous considérons un exemple simple, le problème de l'alignement étant trop complexe pour être pédagogique. Les figures et les résultats sont empruntés à la référence [3]. Imaginons une voiture, initialement positionnée à l'origine d'un repère attaché à la terre. Cette voiture est supposée munie d'odomètres (instruments permettant de compter les tours de roue) dont on déduit notamment la vitesse

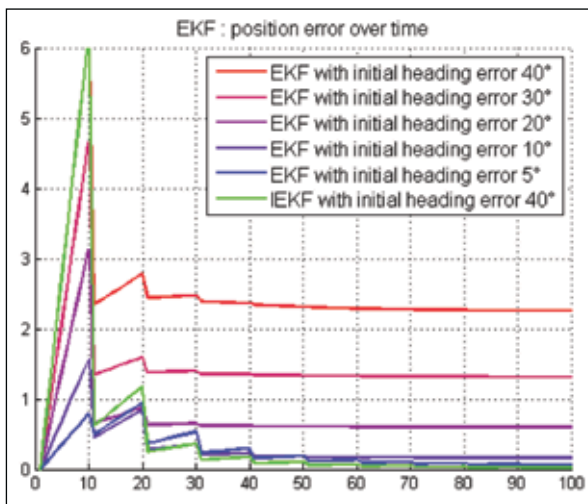


Figure 1 : Comparaison en simulation du filtre de Kalman étendu invariant (courbe verte), et du filtre de Kalman étendu classique (autres courbes). On trace les erreurs de localisation commises par les filtres au cours du temps, pour diverses erreurs de cap initiales allant de 5° à 40°.

indiquée par le compteur) et d'un GPS. Pour transposer ce que permet l'inertie haute précision dans le cas de l'alignement, on se place ici dans le cas limite où les odomètres sont supposés parfaits : la vitesse linéaire (donnée par le compteur) et angulaire (donnée par odométrie différentielle) de la voiture sont parfaitement connues. En revanche, les mesures de position de la voiture par le GPS sont sujettes à des erreurs (des variables aléatoires indépendantes et centrées). On suppose le cap initial de la voiture inconnu et on demande à un filtre de Kalman étendu de retrouver le cap et la position à partir des mesures d'odométrie et GPS. On suppose également pour simplifier que la voiture se déplace en ligne droite et à vitesse constante. Par conséquent le cap de la voiture reste toujours égal au cap initial.

Le filtre de Kalman étendu classique cherche à réduire les erreurs de cap et de position exprimées dans le repère attaché à la Terre (repère des mesures GPS), alors que le filtre de Kalman invariant cherche en substance à réduire les erreurs de cap et de position exprimées dans un repère attaché à la voiture (nous simplifions ici un peu l'explication pour éviter d'entrer dans la théorie des groupes de Lie qui sous-tend les méthodes de filtrage invariant). La figure 1 compare l'erreur de localisation commise par un filtre de Kalman étendu classique (EKF) et un filtre invariant (IEKF) pour diverses erreurs de cap initiales. Elle montre notamment que l'erreur d'estimation d'un IEKF qui se « trompe » initialement de 40° sur le cap est rapidement inférieure à l'erreur d'estimation d'un

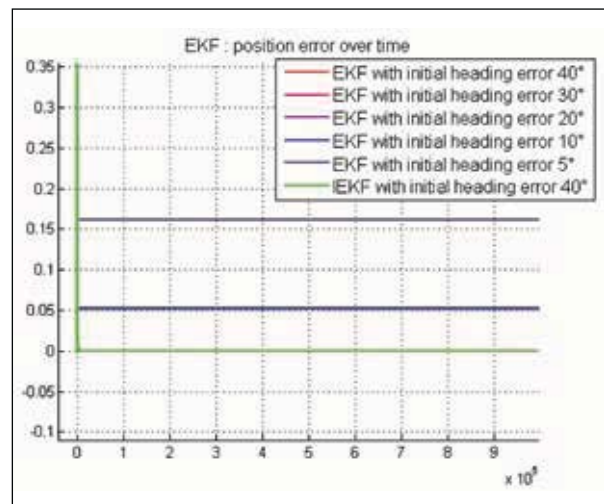


Figure 2 : zoom vertical sur les courbes de la figure 1, sur un temps de simulation plus long (10⁶ itérations). On constate que seul le filtre invariant (courbe verte) obtient une erreur de localisation résiduelle nulle.

EKF qui ne se « trompe » sur le cap initial que de 5° ! La figure 2, qui est un zoom vertical de la figure 1 tracé sur un temps de simulation très long (un million d'itérations) montre un fait encore plus sidérant : l'EKF classique n'arrive pas à retrouver le cap de la voiture, l'erreur d'estimation se stabilisant à une valeur non-nulle. Par contre l'erreur résiduelle d'estimation de l'IEKF est bien nulle.

La figure 3 nous éclaire sur les raisons de la supériorité écrasante du filtre invariant. Elle représente la trajectoire de la voiture dans le plan (ligne droite rouge) et les trajectoires estimées par les filtres classique (en bleu) et

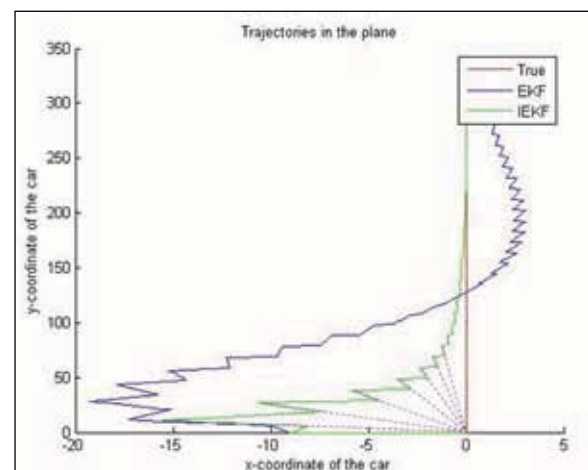


Figure 3 : Vraie trajectoire de la voiture (ligne droite en rouge), et trajectoires estimées par le filtre classique (en bleu) et par le filtre invariant (en vert). Seules les estimations du filtre invariant sont cohérentes avec la physique du problème, qui veut que la voiture se déplace le long d'une droite passant par 0.

invariant (en vert). Les mesures fournies par l'odomètre sont en très haute fréquence (plusieurs milliers de points par tour de roue) et celles fournies par le GPS en basse fréquence (environ 1 Hz). Par conséquent, entre deux données GPS, les filtres font confiance à l'odomètre et les trajectoires estimées sont alors des lignes droites. A chaque mesure GPS, le filtre corrige (il met à jour) son estimation de position et de cap pour prendre en compte l'information GPS. La logique de correction du filtre classique est dure à interpréter. En revanche, le fait qu'on ait « forcé » le filtre invariant à tenir compte des symétries du système, donc de la structure physique du problème, conduit à une propriété très inattendue, bien que hautement logique : lors des mises à jour, le filtre invariant « coordonne » la mise à jour de position et la mise à jour de cap de façon que l'origine du repère (la position initiale de la voiture) soit toujours dos à la voiture. En d'autres termes, entre deux mesures GPS, la trajectoire estimée par le filtre invariant coïncide toujours avec un rayon du cercle centré sur la position initiale. En effet, quoi que dise le GPS et quel que soit le cap initial, l'odométrie supposée parfaite indique bien que la voiture se déplace en ligne droite, donc *nécessairement* le long d'un rayon du cercle centré sur la position initiale. L'EKF tient bien compte de cette information, comme l'illustre la figure 3, où les lignes en pointillés prolongent la trajectoire estimée par le filtre invariant entre deux mises à jour liées à une donnée GPS. Le problème d'estimation est donc considérablement simplifié car le filtre n'a plus qu'à identifier le bon rayon. C'est ainsi que nous avons pu obtenir la garantie mathématique, pour cet exemple, que notre filtre était capable de localiser la voiture quelle que soit l'erreur de cap initiale ! Démontrer une telle propriété pour un EKF classique semble hors de portée.

On notera que cette réduction de la dimensionnalité d'un problème grâce à l'utilisation de ses symétries est très classique dans la démarche du physicien. Nous sommes heureux d'avoir pu en bénéficier pour améliorer un outil classique de l'ingénieur, l'EKF, quand il est appliqué à des systèmes qui présentent un nombre suffisant de symétries.

Conclusion

Nous avons situé le domaine de la navigation et l'apport du filtrage de Kalman à ce domaine. Nous avons décrit le problème de l'alignement, pour lequel un filtre de Kalman étendu non-linéaire modifié a été proposé par Axel Barrau et moi-même, puis développé et im-

plémenté chez SAGEM avec l'aide des ingénieurs Xavier Bissuel, Yann Le Guilloux, Emmanuel Robert, et Thierry Perrot. Pour des raisons essentiellement pédagogiques, nous avons dans une deuxième partie décrit et illustré les propriétés de notre filtre non-linéaire sur un exemple simplifié de navigation haute précision. Cet exemple démontre notamment l'avantage de nos méthodes sur le filtre de Kalman étendu classique.

Références

- [1] Silvère Bonnabel. "Left-invariant extended Kalman filter and attitude estimation." *IEEE conference on decision and control*. 2007.
- [2] Philippe Martin, Pierre Rouchon, and Joachim Rudolph. "Invariant tracking." *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*. 10:1–13. 2004.
- [3] Axel Barrau and Silvère Bonnabel. "Navigating with highly precise odometry and noisy GPS, a case study". *HAL pré-publication*. (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01267244>). 2016.



Silvère Bonnabel est maître-assistant à Mines ParisTech, où il enseigne les probabilités et les processus stochastiques. Il est ingénieur civil (2004) et docteur (2007) de Mines ParisTech. Il a obtenu l'habilitation à diriger les recherches (HDR) de l'université Pierre et Marie Curie en 2014.

Ses travaux portent essentiellement sur la théorie du contrôle, de la robotique et leurs applications industrielles.