

FILTRAGE ET NAVIGATION INERTIELLE

SILVERE BONNABEL

ABSTRACT. Le problème de la navigation inertielle consiste à repérer un solide dans l'espace à partir de données bruitées sur l'accélération, la vitesse de rotation, et le champ magnétique dans un repère lié au solide. Le GPS offre la possibilité de connaître sa position à intervalles de temps réguliers: environ toutes les secondes. Il s'agit de reconstituer le mouvement et l'orientation du mobile après filtrage des données issues des capteurs et après recalage sur les données GPS.

L'article présente les résultats du filtrage de données issues d'une centrale inertielle MT9 XSENS fixée sur le robot $2k\pi$ de l'Ecole des Mines. Sont traités le cas du mouvement 2D et du mouvement 3D. Il apparaît que l'on peut utiliser la méthode classique de Kalman mais aussi des méthodes basées sur les observateurs de Luenberger qui demandent moins de calcul. Quelle que soit la méthode, on estime avec une meilleure précision l'orientation (attitudes) du mobile que sa position.

Mots clés : filtre de Kalman étendu, filtre non linéaire, centrale inertielle, fusion de données.

1. INTRODUCTION

On considère dans l'espace à trois dimensions un objet mobile (drône) sur lequel est fixé une centrale inertielle. La centrale est composée par des accéléromètres, un gyroscope (laser), et des magnétomètres.

Les accéléromètres donnent une mesure à tout instant de l'accélération a du mobile dans un repère attaché au mobile (le repère de la centrale). Ils sont constitués de petits ressorts placés au centre de gravité du mobile et dont on mesure l'allongement. Les gyromètres donnent une mesure du vecteur rotation instantané ω dans le même repère. Les magnétomètres donnent une mesure du vecteur champ magnétique b dans le repère de la centrale. Les données issues des capteurs sont biaisées et bruitées.

On suppose qu'on dispose en continu (fréquence de l'ordre de 10^2 Hz) des données récupérées par la centrale inertielle (a, b, ω) , ainsi que

de données GPS qui indiquent la position du mobile avec une fréquence de l'ordre du Hertz. La relativement basse fréquence de la disponibilité des mesures GPS est une réalité.

Le but de notre travail est de reconstituer la courbe du mouvement du mobile dans un repère fixe partir des données de la centrale et des données GPS. La méthode classique utilisée dans l'aérospatiale consiste à utiliser un filtre de Kalman.

Nous essaierons, sur certains cas particulier, de tester quelques méthodes de filtrage non linéaires qui nécessitent moins de calcul que le filtre de Kalman. Pour cela, on considèrera dans un premier temps le cas simple d'un mouvement plan, puis on passera ensuite au cas général d'un mouvement dans l'espace.

On dispose, pour tester le filtre, de données obtenues lors d'une expérience réalisée au Centre Automatique et Systèmes de l'École des Mines, avec le robot $2k\pi$ (photo <http://cas.ensmp.fr/CAS/2kPi/>). Une centrale inertielle (modèle MT9 de XSENS, prix: 2000\$) est placée au bout du bras du robot. Le bras tourne dans un plan horizontal. Au cours de l'expérience le robot connaît avec exactitude la position et la vitesse du bras. Nous comparons les résultats obtenus par traitement des données à ces derniers.

Pour la définition de la notion d'observabilité et sa caractérisation, nous nous référons à [3]. Pour les équations du filtre de Kalman en continu et en discret, nous nous référons à [2]. Finalement pour la notion de filtre et les équations du filtre de Kalman étendu, nous nous référons à [1]. Nous utiliserons pour la preuve de la convergence du filtre non linéaire du filtre de Kalman la preuve de Slotine dans l'appendice de [4].

2. CAS 2D: DYNAMIQUE DU SYSTÈME ET OBSERVABILITÉ

On considère dans le plan un repère fixe (O, \vec{X}, \vec{Y}) où l'origine O du repère est un point fixe. Si \vec{B} est le champ magnétique, on suppose que \vec{X} a même orientation et même direction que \vec{B} . Soit (P, \vec{x}, \vec{y}) le repère mobile de la centrale inertielle où P est un point attaché à la centrale. Soit θ l'angle orienté $\widehat{(\vec{x}, \vec{X})}$. Soient $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\vec{\omega}(t)$ les vecteurs accélération, champ magnétique, et rotation exprimés dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) .

Soit R la matrice de rotation $R(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}$. La dynamique du mouvement s'écrit

$$(1) \quad \ddot{P} = R \vec{a}$$

$$(2) \quad \dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= \frac{\vec{b}(t)}{\|\vec{b}(t)\|} \cdot \vec{x} \\ \sin \theta(t) &= -\frac{\vec{b}(t)}{\|\vec{b}(t)\|} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

L'état du système est décrit par le vecteur $(P_X, \dot{P}_X, P_Y, \dot{P}_Y, \theta)$ où (P_X, P_Y) sont les coordonnées du point P dans le repère fixe. Un système est dit *observable* si à deux états initiaux distincts correspondent deux sorties distinctes, pour une certaine entrée. On dit que les sorties sont distinctes si elles diffèrent au moins pour un certain temps t_1 . Pour fixer les idées, formellement, et sous conditions, on peut montrer qu'un système est observable si la connaissance de l'entrée ainsi que de la sortie et de ses dérivées par rapport au temps, permet de déterminer de manière unique l'état.

Ici la sortie est le vecteur \vec{b} , l'entrée le vecteur $(\vec{a}, \vec{\omega})$

L'entrée et l'état sont liés de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tau) &= \dot{P}(0) + \int_0^\tau R \vec{a} \\ P(t) &= P(0) + \int_0^t \dot{P}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

et

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega$$

Il apparaît donc que les trajectoires correspondantes à la même entrée $(\vec{a}(t), \vec{\omega}(t))$, à la même sortie $\vec{b}(t)$ et à des conditions initiales différentes peuvent être différentes. Peuvent donc exister des trajectoires différentes qui correspondent à une même sortie. Par exemple si

les conditions initiales de vitesse sont égales et les conditions initiales de position différent, alors les trajectoires (orbites) se déduisent l'une de l'autres par une translation non nulle dans l'espace des phases. *Le système n'est pas observable si l'on ne dispose que des données de la centrale.*

La trajectoire est déterminée de manière unique par la connaissance des vecteurs $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\omega(t)$ ainsi que des seules conditions initiales $P(0), \dot{P}(0)$. En effet $\theta(0)$ est lui déterminé par $\vec{b}(0)$.

Ceci dit, il n'est pas nécessaire de connaître les conditions initiales si l'on dispose des informations GPS qui donnent $P(t)$. L'ajout des informations GPS en sortie rend le système observable.

Dans la pratique, on utilise les données GPS, les données de la centrale, et les conditions initiales: on initialise le calculateur avant le départ du mobile. Le mobile est alors au repos, et on règle les conditions initiales de vitesses linéaires et angulaires sur zéro. On compare tout au long du mouvement les positions GPS à celles obtenues par intégration des équations différentielles (1) et (2).

Remarque: Le système est non linéaire, car $P(t)$ dépend de $\cos \theta(t)$ et de $\sin \theta(t)$.

L'équation $\dot{\theta} = \omega$ est une équation différentielle définie sur le cercle. L'intégration de cette équation, moyennant les bonnes conditions initiales, permet la connaissance de l'orientation du mobile dans le plan. C'est une information que l'on possède déjà puisqu'on connaît le vecteur b .

θ est défini modulo 2π . Il est donc dangereux lors du recalage des angles de comparer le θ obtenu par intégration avec celui obtenu par inversion de l'équation $\cos \theta = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot x$, $\sin \theta = -\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot y$. Il paraît donc préférable de remplacer θ par le couple $(\cos \theta, \sin \theta)$ et de recalculer directement sur les coordonnées du vecteur b dans le repère mobile.

La dynamique sur le cercle $\dot{\theta} = \omega$ se transforme dans les variables $u = \cos \theta, v = \sin \theta$ en une équation linéaire sur le plan $\dot{u} = -\omega v, \dot{v} = \omega u$

Les conséquences de cette modification sont une augmentation de la taille de l'état (taille de l'espace des phases), maintenant décrit par les 6 variables $(P_X, \dot{P}_X, P_Y, \dot{P}_Y, \cos \theta, \sin \theta)$. On a simplifié le problème (on

se ramène au cas linéaire) en augmentant l'ordre du système.

Résumé: L'état I du système est décrit par les 6 variables

$$I = \begin{pmatrix} P_X \\ \dot{P}_X \\ P_Y \\ \dot{P}_Y \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

En entrée E on dispose des vecteurs accélération et rotation exprimés dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) .

$$E = \begin{pmatrix} \vec{a}(t) \\ \vec{\omega}(t) \end{pmatrix}$$

Les équations de la dynamique du mouvement sont

$$\begin{aligned} \ddot{P} &= R \vec{a} \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \end{aligned}$$

$$\text{avec } R(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

On appelle b_x et b_y les coordonnées du vecteur champ magnétique exprimé dans le repère mobile. En sortie on récupère le signal

$$S = \begin{pmatrix} P_X \\ P_Y \\ b_x(t) \\ b_y(t) \end{pmatrix}$$

où les informations de position P_X , P_Y sont délivrées par le GPS toutes les secondes et le vecteur champ magnétique b_x , b_y par la centrale toutes les 20 ms (en continu).

3. PRESENTATION DES DONNEES

On considère maintenant les données issues de la centrale inertielle à la suite de l'expérience avec le robot $2k\pi$. Le mouvement décrit par le bras du robot (donc par la centrale) est circulaire uniforme, dans un plan horizontal. Les figures 1 et 2 présentent les mesures des vecteurs accélération et rotations issues de la centrale pendant les

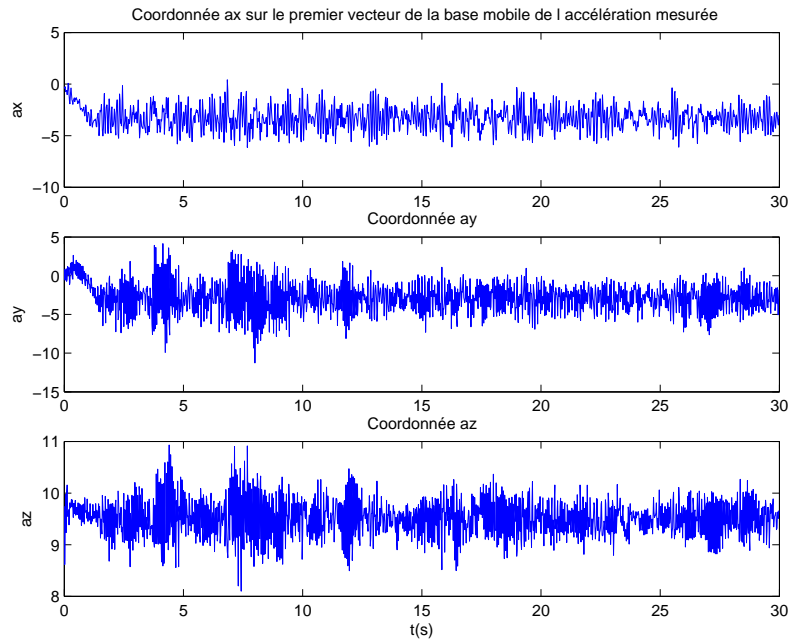


FIGURE 1. mesures d'accélération dans le repère mobile en m/s^2 issues des capteurs de la centrale

trentes premières secondes.

4. CAS 2D ESTIMATION DE L'ORIENTATION DU MOBILE

Le robot a enregistré le mouvement de son bras. Nous allons essayer de retrouver ce mouvement à partir des données de la centrale. Tout au long notre étude nous comparerons les résultats obtenus par traitement des données à ceux enregistrés par le robot. La figure (3) présente l'orientation enregistrée par le robot au cours du temps et l'estimation de l'orientation avec un observateur de Luenberger que nous allons voir.

Voyons maintenant le principe de l'observateur de Luenberger. Soit le système linéaire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x \\ y &= Cx\end{aligned}$$

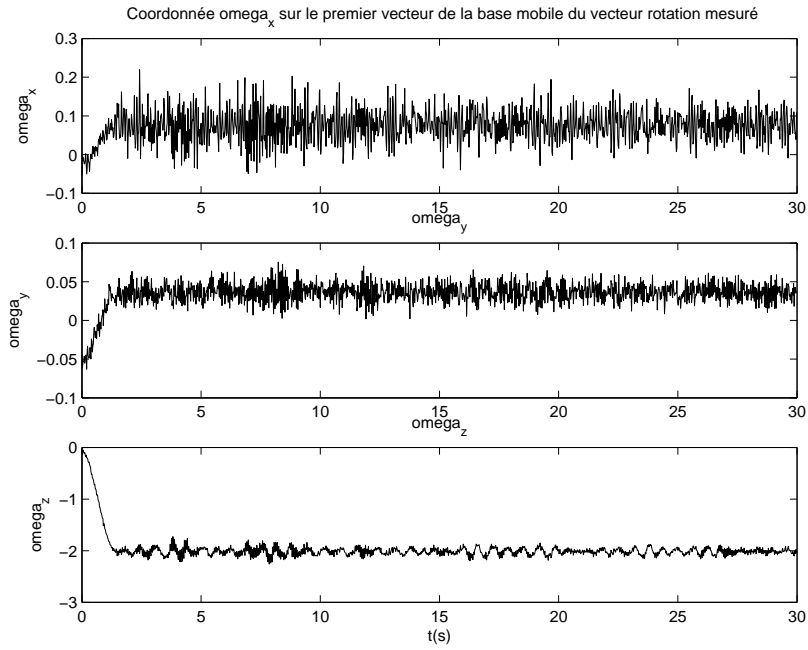


FIGURE 2. mesures des coordonnées du vecteur rotation en rad/s dans le repère mobile issues des capteurs de la centrale

L'observateur de Luenberger est un modèle d'état \hat{x} de la forme

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A(t)\hat{x} + K(y - C\hat{x})$$

avec K gain positif constant. L'observateur est construit de manière à ce que \hat{x} converge asymptotiquement vers x . En effet si l'on appelle $\tilde{x} = x - \hat{x}$ l'erreur, on a

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = A(t)\tilde{x} - KC\tilde{x}$$

Et si la matrice K est bien choisie (les valeurs propres de la matrice $A-KC$ sont à partie réelle strictement négatives), \tilde{x} tend vers 0.

On rappelle que dans un premier temps on cherche à estimer l'orientation $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ du mobile à partir du champ $\vec{b}(t)$ afin de projeter l'accélération $\vec{a}(t)$ dans le repère fixe. Essayons d'estimer l'orientation au moyen d'un observateur de Luenberger dans le cadre de l'expérience effectuée sur le robot $2k\pi$.

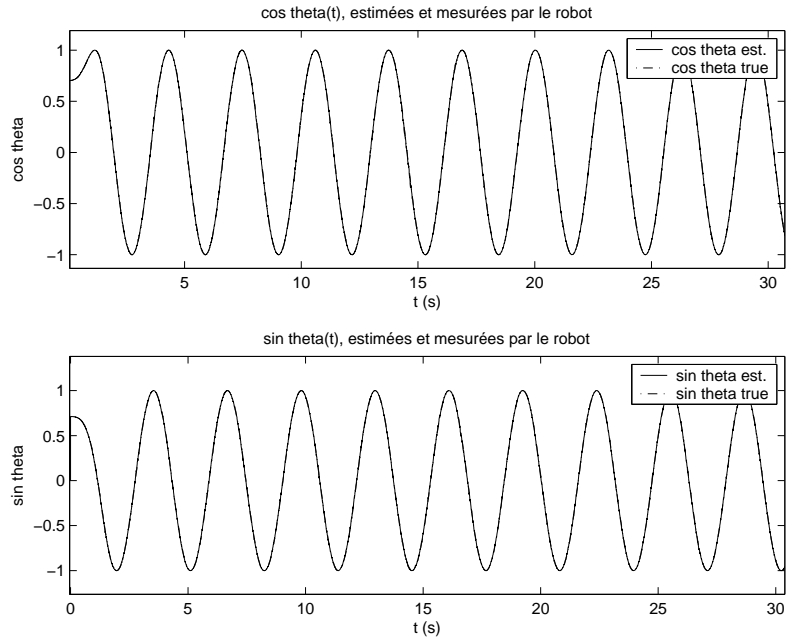


FIGURE 3. orientation du mobile au cours du temps : enregistrement robot et estimation (indistinguables sur le graphique car $|\theta - \hat{\theta}| \approx 10^{-3}10$)

Le mouvement décrit par le bras du robot sur lequel est fixé la centrale est circulaire uniforme dans un plan horizontal. La figure 4 (graphique du haut) présente le vecteur champ magnétique \vec{b} enregistré par les magnétomètres.

Les équations qui lient la sortie et l'état sont:

$$\cos \theta(t) = \frac{\vec{b}(t)}{\|\vec{b}(t)\|} \cdot \vec{x}$$

$$\sin \theta(t) = -\frac{\vec{b}(t)}{\|\vec{b}(t)\|} \cdot \vec{y}$$

La connaissance de \vec{b} au cours du temps devrait suffire pour connaître l'orientation.

Si l'on pose $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, les équations de la dynamique du mouvement sont:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c &= -\omega(t)s \\ \frac{d}{dt}s &= \omega(t)c\end{aligned}$$

L'observateur de Luenberger s'écrit donc pour ce système

$$\begin{aligned}\hat{c}(0) &= c(0) \\ \hat{s}(0) &= s(0) \\ \frac{d}{dt}\hat{c} &= -\omega\hat{s} + K((b_n)_x - \hat{c}) \\ \frac{d}{dt}\hat{s} &= \omega\hat{c} + K((b_n)_y - \hat{s})\end{aligned}$$

avec $\vec{b}_n = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$. Si le gain K est bien réglé et les mesures fiables, l'observateur converge vers l'orientation $(\cos \theta, \sin \theta)$. Sur la figure 3, la courbe de l'observateur et la courbe à estimer sont confondues

Problème rencontré : Le champ magnétique terrestre est très faible. En effet on l'annule à l'intérieur d'un solénoïde basique en faisant passer un courant de 8 miliampère.

La tourelle du robot est en acier et pèse 25 kg. Elle perturbe le champ magnétique. En effet on sait que le mouvement de la centrale est circulaire, donc que θ décrit tout le cercle. Donc si le vecteur champ magnétique \vec{B} était constant dans l'espace, puisque \vec{x}, \vec{y} restent dans un plan, on aurait $\max\{\vec{B} \cdot \vec{x} \text{ sur un tour}\} = \max\{\vec{B} \cdot \vec{y} \text{ sur un tour}\}$. Mais comme on peut le voir sur la figure 4, graphique du haut, cela n'est pas vrai. Donc la mesure de \vec{B} dépend du point de l'espace où on le mesure. Le vecteur \vec{B} n'est pas constant. On trouve une variation de sa norme supérieure à 50 %.

Il n'est pas constant dans l'espace mais il est stationnaire, puisqu'il garde la même valeur au même endroit à chaque passage du bras.

Nous allons essayer d'utiliser l'observateur pour reconstruire l'orientation à partir des données faussées de champ.

Si l'on pose $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, les équations de la dynamique du mouvement sont:

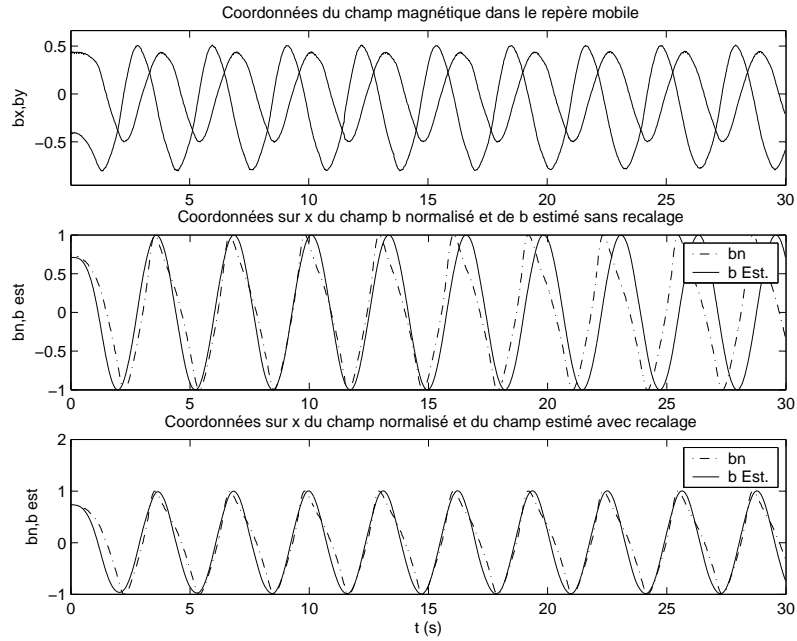


FIGURE 4. redressement du champ magnétique à partir de données fausses

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c &= -\omega(t)s \\ \frac{d}{dt}s &= \omega(t)c\end{aligned}$$

La connaissance des conditions initiales $\cos \theta_0, \sin \theta_0$ et de ω permet de reconstituer l'orientation au cours du temps (notons au passage que ω est constant). Mais il suffit que la mesure ω soit un peu biaisée pour que sur un temps suffisamment long l'estimation de l'orientation dérive et soit fausse.

On peut utiliser les données faussées du champ pour éviter cette dérive en recalant l'orientation sur les données de champ mesuré.

Puisque la norme de \vec{b} varie, on construit le vecteur champ magnétique normalisé \vec{b}_n ainsi

$$\vec{b}_n = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

On voit sur la figure 4 (graphique du milieu) que les coordonnées de \vec{b}_n (pointillés) ne décrivent pas un sinus et un cosinus au cours du temps, alors que pourtant le mouvement est circulaire uniforme. Mais les fonctions coordonnées de \vec{b}_n sont périodiques de même période que le mouvement puisque le champ \vec{B} est stationnaire.

On peut donc imaginer de construire un observateur \hat{x} qui soit une estimation de x ainsi

$$\begin{aligned}\hat{c}(0) &= c(0) \\ \hat{s}(0) &= s(0) \\ \frac{d}{dt}\hat{c} &= -\omega\hat{s} + K((b_n)_x - \hat{c}) \\ \frac{d}{dt}\hat{s} &= \omega\hat{c} + K((b_n)_y - \hat{s})\end{aligned}$$

où le gain K est faible. En effet le terme facteur de K permet de recaler l'observateur sur le champ magnétique et d'éviter une dérive de \hat{c} et \hat{s} . Comment choisir K pour que sur un temps court la dynamique de l'observateur soit régie par ω et sur un temps long par les mesures de champ? On peut prendre K de l'ordre de grandeur de $1/T$ avec T période du mouvement, puisque K est l'inverse d'un temps. Alors K est suffisamment faible pour que \hat{c} et \hat{s} soient proches d'un sinus et d'un cosinus mais suffisamment grand pour que l'observateur ne présente pas d'avance ou de retard moyen sur une période sur les données de champ et qu'il n'y ait pas de dérive. (figure 4 graphique du bas). On a maintenant une estimation correcte de l'orientation.

Résumé

On cherche à estimer l'orientation du mobile à partir des données de champ magnétique. On utilise un observateur

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{c} &= -\omega\hat{s} + K((b_n)_x - \hat{c}) \\ \frac{d}{dt}\hat{s} &= \omega\hat{c} + K((b_n)_y - \hat{s})\end{aligned}$$

Le gain K représente la confiance que l'on accorde aux données de champ magnétique mesuré. Si K est grand, (\hat{c}, \hat{s}) sont très proches de $((b_n)_x, (b_n)_y)$. Or les données de champ magnétique sont fausses car le champ est perturbé. On choisit donc le gain K faible, ce qui veut dire qu'on fait peu confiance aux données et beaucoup au modèle physique

et à la mesure de ω .

Discussion Le principe du filtre de Kalman est donné en appendice. On peut essayer d'estimer l'orientation au moyen d'un filtre de Kalman. Le réglage des gains est fait ainsi: on choisit la variance du bruit d'état petite. En effet la variance de ω sur un petit intervalle de temps (bruit) est de l'ordre de 1. On déduit des équations discrétisées que la variance du bruit d'état est de l'ordre de 0.02×1 , donc faible. Parcontre on choisit un bruit de sortie grand car les données sont fausses. On prend la variance du bruit de sortie de l'ordre de 0.5 car l'amplitude du mouvement est 1.

Le gain de Kalman dépend de la différence et du rapport entre les bruits d'état et de sortie. Il est clair que si le bruit de sortie est faible le gain sera grand et inversement. Ici on voit quand on fait les simulations que Kalman est équivalent à Luenberger, et demande beaucoup plus de calculs.

5. CAS 2D: ESTIMATION DE LA POSITION

On considère toujours les données issues de la centrale inertielle (figures 1 et 2). Maintenant qu'on a une estimation de l'angle θ en continu, on peut construire un observateur (Kalman ou Luenberger) pour estimer la position du mobile P_X, P_Y .

On utilise pour obtenir le terme de propagation les équations de la dynamique du système. Il faut faire un recalage sur les données GPS de position toutes les 1.2 s. On voit les données GPS sur la figure 5.

En ce qui concerne le recalage sur les données GPS, toutes les 1.2 s, il faut intégrer en boucle ouverte (selon les équations de propagation) entre deux recalages.

Reste à régler les matrices de covariance des bruits d'état Q et des bruits de sortie R pour programmer Kalman ainsi que la matrice de covariance de l'erreur initiale P_0 .

On peut calculer l'écart-type du vecteur $\overrightarrow{a}(t)$ sur un intervalle de temps court devant la période du mouvement et long devant l'inverse de la fréquence du bruit. Ainsi, sur cet intervalle le signal est bruité, de moyenne à peu près constante. On trouve un écart type de 2 pour les coordonnées du vecteur accélération.

Le pas de discrétisation est $T = 0.02$. La matrice A_k s'écrit $\text{Id} + T A(kT)$. L'ordre de grandeur de la variance du bruit d'état v_k est donc 0.04. On décide de faire totalement confiance aux données GPS, disponibles

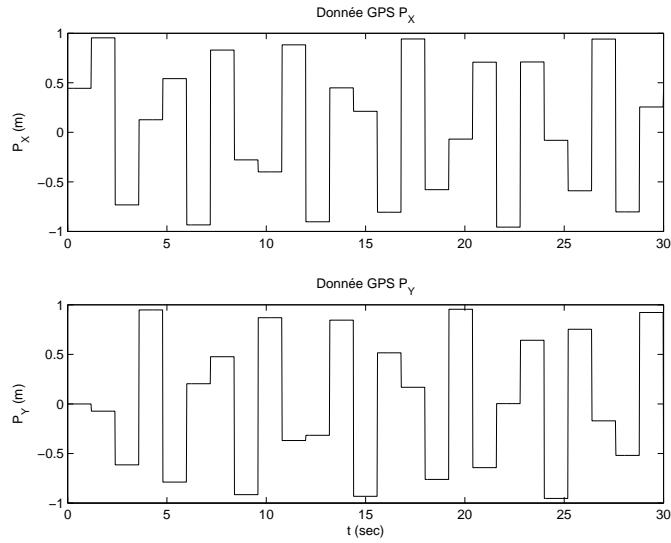


FIGURE 5. données GPS (simulées pour l'expérience avec le robot)

toutes les 1.2 s (dans le cadre de l'expérience on a pris les positions enregistrées par le robot), donc on prend un bruit de sortie w_k nul.

Finalement, la matrice P_k modélise la variance de l'erreur, donc la confiance qu'on peut avoir en l'estimation \hat{x} de l'état. Les conditions initiales de vitesse sont nulles. On considère que les conditions initiales de position sont justes à 0.1 près car le robot commence à donner les positions au moment où le bras bouge donc on ne connaît pas avec certitude les positions à $t=0$. On prend donc $P = 0.1 \text{ Id}$.

Il reste encore quelques précautions à prendre.

Les données des accéléromètres sont biaisées, car elles indiquent un accélération non-nulle alors que le mobile est au repos. Soustraire à l'accélération le biais statique n'est pas suffisant, car le biais statique est différent du biais dynamique. En intégrant l'accélération, on obtient la vitesse, et on accumule un biais (figure 6).

On peut éviter cette dérive en recalant la vitesse sur les données GPS. En effet soient $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ les valeurs de la position selon le GPS. Soient $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n, \dots)$ les valeurs de l'estimation de la position.

On a

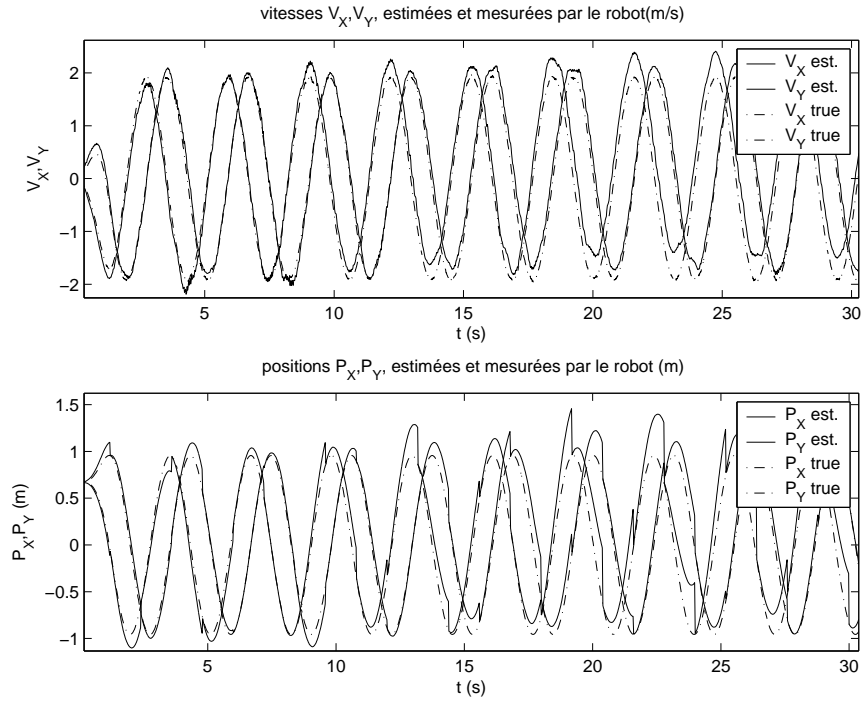


FIGURE 6. courbes de position et courbes de vitesses réelles (true) mesurées par le robot et estimées (est.) sans recalage de la vitesse

$$X_n - X_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} V$$

$$\hat{X}_n^- - \hat{X}_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \hat{V}$$

donc si on suppose qu'après recalage $\hat{X}_{n-1} \simeq X_{n-1}$ on a

$$X_n - \hat{X}_n^- = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (V - \hat{V})$$

Comme $X_n - \hat{X}_n^-$ est proportionnel au biais de la vitesse, on peut ajouter un observateur qui contrebalance la dérive de V

$$\hat{V}_{n+1} = \hat{V}_n + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a dt + K_V (X_n - \hat{X}_n^-)$$

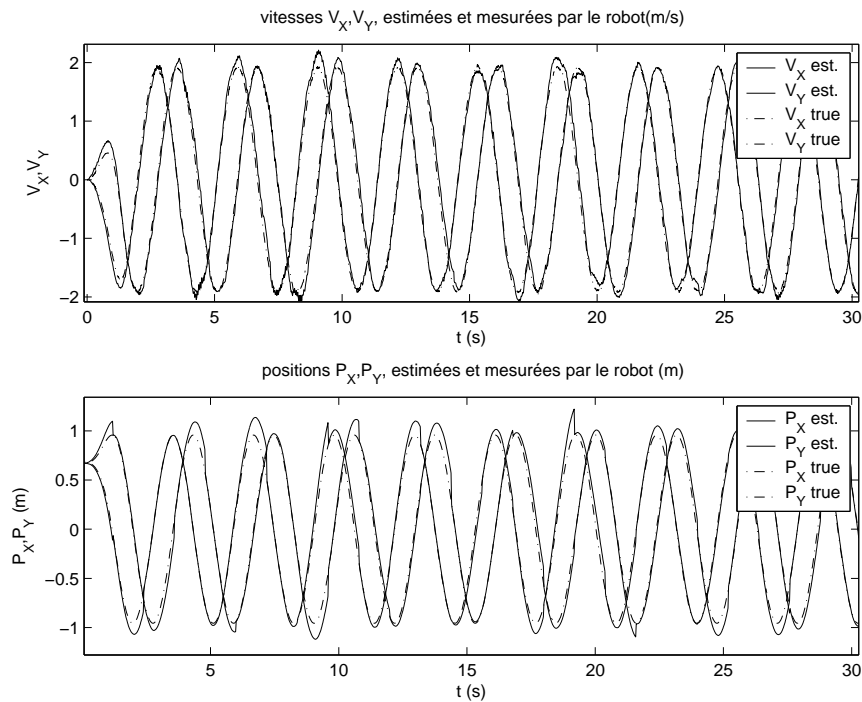


FIGURE 7. courbes de position et courbes de vitesses réelles (true) mesurées par le robot et estimées (est.), résultat final

On voit le résultat final sur la figure 7.

discussion

On obtient le même résultat avec un observateur de Luenberger bien réglé. On a confiance en les données GPS, donc on choisit un gain fort ($K=10$). Ici le mouvement est suffisamment simple pour qu'un gain constant soit adapté.

6. CAS 3D: DYNAMIQUE DU SYSTÈME

Il s'agit de construire un estimateur de la position du mobile pour un mouvement dans l'espace. On a utilisé pour tester la méthode les données obtenues lors d'une expérience avec le robot $2k\pi$. Le premier bras du robot décrit un mouvement circulaire uniforme dans un plan horizontal autour d'un axe de rotation vertical, et la centrale est fixée à un bras qui tourne uniformément autour du premier bras. La période de rotation autour de l'axe vertical est le double de celle autour de l'axe

du bras. Le mouvement est donc périodique.

On considère dans l'espace un repère fixe $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ où l'origine O du repère est un point fixe. \vec{B} est le champ magnétique. Soit $(P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère mobile de la centrale inertielle où P est un point attaché à la centrale. Soient $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\vec{\omega}(t)$ les vecteurs accélération, champ magnétique, et rotation exprimés dans le repère mobile.

Soit $R(t) \in SO(3)$ la matrice de rotation qui envoie le repère mobile sur le repère fixe. La dynamique du mouvement s'écrit

$$\begin{aligned}\ddot{P} &= R\vec{a} + \vec{g} \\ \dot{R} &= R(\vec{\omega} \wedge .)\end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$R\vec{b} = \vec{B}$$

Dans le cas 2D, on recalcule $(\cos \theta, \sin \theta)$ sur les données de \vec{b} . Dans le cas 3D, la connaissance de \vec{b} et de \vec{B} ne permet de situer l'axe de la rotation R que dans un plan. Le système n'est pas observable. Or comme on l'a vu dans le cas précédent (dérive lente du cycle de la vitesse figure 5) on accumule des dérives en intégrant en boucle ouverte une équation du type $\dot{R} = R(\omega \wedge .)$. Nous allons donc simplifier le problème.

Résumé: L'état I du système est décrit par les 6 variables

$$\begin{pmatrix} P_X \\ \dot{P}_X \\ P_Y \\ \dot{P}_Y \\ P_Z \\ \dot{P}_Z \end{pmatrix}$$

et par les 9 coefficients de la matrice de rotation:

$$(R_{ij}) \quad 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$$

En entrée E on dispose des vecteurs accélération et rotation exprimés dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$E = \begin{pmatrix} \vec{a}(t) \\ \vec{\omega}(t) \end{pmatrix}$$

Les équations de la dynamique du mouvement sont

$$\begin{aligned}\ddot{P} &= R\vec{a} \\ \dot{R} &= R(\vec{\omega} \wedge .)\end{aligned}$$

On appelle b_x , b_y et b_z les coordonnées du vecteur champ magnétique exprimé dans le repère mobile. En sortie on récupère le signal

$$S = \begin{pmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \\ b_x(t) \\ b_y(t) \\ b_z(t) \end{pmatrix}$$

où les informations de position P_X , P_Y , P_Z sont délivrées par le GPS toutes les secondes et le vecteur champ magnétique b_x , b_y , b_z par la centrale toutes les 20 ms (en continu).

7. PRESENTATION DES DONNEES

On considère les données issues de la centrale inertielle à la suite de l'expérience avec le robot $2k\pi$. Les figures 8, 9 et 10 présentent toutes les mesures pendant les trente premières secondes.

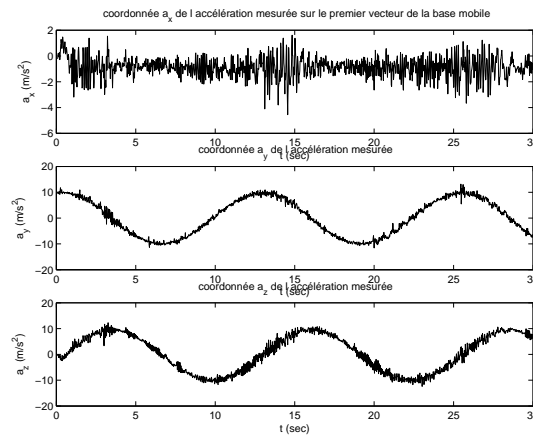


FIGURE 8. mesures de l'accélération

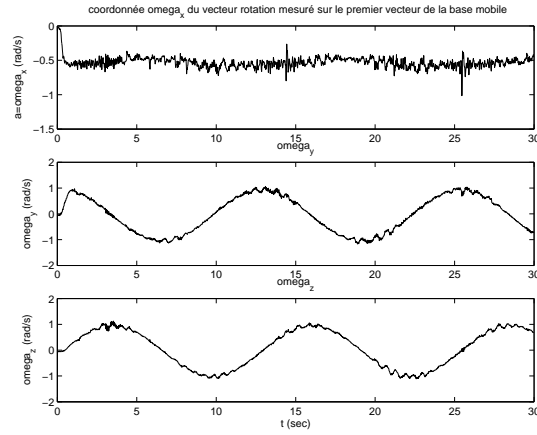


FIGURE 9. mesures de la rotation

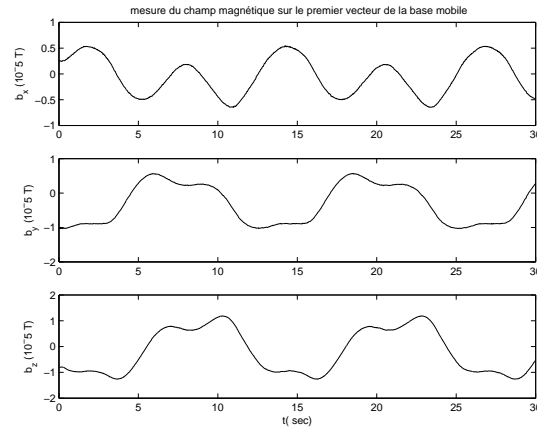


FIGURE 10. champ magnétique mesuré

8. ESTIMATION DE L'ORIENTATION \hat{R} DU MOBILE

On considère en première approximation que le mouvement est quasi-statique, ie $a \ll g$. Les équations deviennent

$$\begin{aligned} R\vec{a} &= -\vec{g} \\ R\vec{b} &= \vec{B} \\ \dot{R} &= R(\vec{\omega} \wedge \cdot) \end{aligned}$$

Les vecteurs g et B n'étant pas colinéaires, la matrice de rotation est donnée par la formule

$$R[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}] = [-\vec{g}, \vec{B}, -\vec{g} \wedge \vec{B}]$$

En écrivant

$$(3) \quad R = [-\vec{g}, \vec{B}, -\vec{g} \wedge \vec{B}][\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}]^{-1}$$

On construit un estimateur \hat{R} qui est un observateur

$$(4) \quad \frac{d}{dt}\hat{R} = \hat{R}(\omega \wedge \cdot) + K_\omega(R - \hat{R})$$

Le premier terme du second membre permet de suivre la dynamique du système sur un temps court (K_ω faible), et le second sur un temps long, même si R est une approximation de la matrice de rotation. Le principe est le même que celui qui permet de reconstruire le champ magnétique en 2D avec des données fausses dans la section 2.

Remarque: dans la pratique on renormalise $\vec{a}, \vec{b}, \vec{g}, \vec{B}$, c'est à dire qu'one les divise tous par leur norme, puisque R ne doit dépendre que de leur orientation.

Remarque: On a construit un filtre non linéaire (formules (3) et (4)).

On suppose K symétrique positive et R matrice de rotation. Alors \hat{R} converge vers R . En effet si l'on pose $e = R - \hat{R}$, comme la matrice $(\omega(t) \wedge \cdot)$ est antisymétrique on a

$$\begin{aligned} n \frac{d}{dt} \|e\|^2 &= 2tr(\dot{e}e') \\ &= -2tr(Ke e') \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \|e\|^2 \leq -\|K\| \|e\|^2$$

Donc la norme de e tend vers 0 (lemme de Gronwall). CQFD

Nous avons donc construit un estimateur (observateur de Luenberger) de la matrice de rotation R dans le cas de l'approximation quasi-statique. On peut maintenant construire un filtre de Kalman pour recalculer la position sur les données GPS.

Problème rencontré : Comme dans le cas 2D, le champ magnétique mesuré ne correspond pas au champ magnétique terrestre. En effet, au

cours du mouvement sa norme varie de plus de 50 %. Nous allons donc construire un estimateur du champ magnétique terrestre à partir des données fausses.

On commence par normaliser le champ. On travaille sur \vec{b}_n .

$$\vec{b}_n(t) = \frac{\vec{b}(t)}{\|\vec{b}(t)\|}$$

On construit un estimateur du champ \vec{b} par intégration de l'équation dynamique

$$\frac{d}{dt} \vec{b} = -\vec{\omega} \wedge \vec{b}$$

avec recalage lent sur \vec{b}_n pour éviter les dérives.

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \vec{b} = -\vec{\omega} \wedge \vec{b} + K_b(\vec{b}_n - \vec{b})$$

On prend K_b de l'ordre de $1/T$ où T est la période du mouvement. On voit le résultat sur la figure (11).

9. ESTIMATION DE L'ORIENTATION : RESULTAT

Sur la figure 11 on voit les coordonnées dans la base mobile du champ magnétique mesuré et du champ estimé par la formule (5).

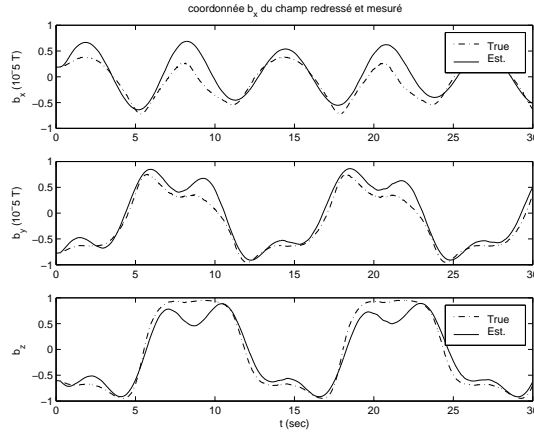


FIGURE 11. champ magnétique mesuré et champ reconstitué

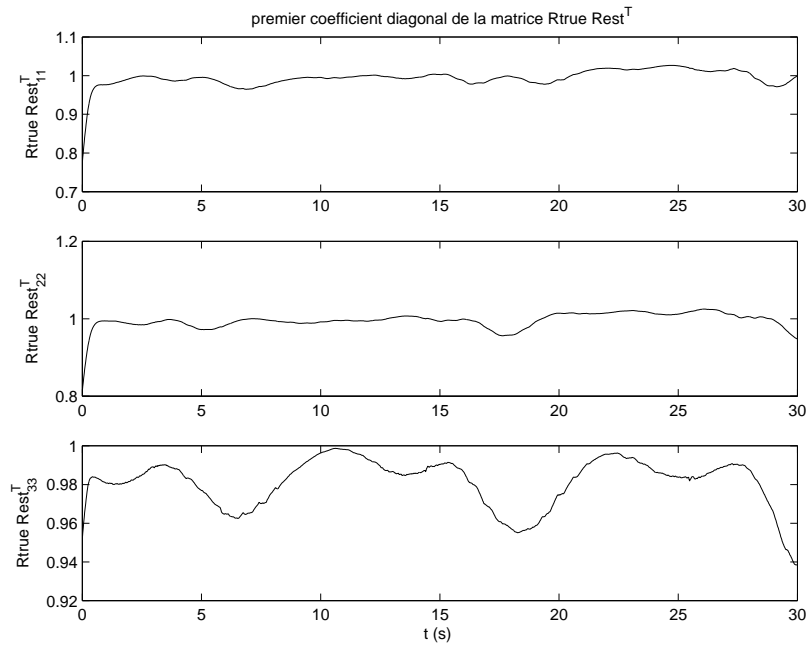


FIGURE 12. coefficients diagonaux de $R_{true} Rest^T$. Si la matrice estimée est égale à la vraie matrice, $R_{true} Rest^T = Id$.

Les figures 12 et 13 présentent les coefficients de la matrice au cours du temps du produit R estimé par la transposée de R vraie, qui est la matrice de rotation reconstituée a posteriori car on connaît le mouvement qui a été enregistré par le robot. On compare la matrice $R_{true} Rest^T$ à la matrice identité, donc les coeff diagonaux à 1 et les autres à 0.

Remarque : Les matrices de rotation forment un groupe. Ici il ne faut pas comparer la différence des deux matrices à zéro mais plutôt le produit d'une matrice par l'inverse de l'autre à l'identité. Car $So(3)$ est un sous groupe *multiplicatif* d'élément neutre Id .

On observe une erreur de l'ordre de 0.05 sur les coefficients diagonaux et de 0.2 sur les autres coefficients.

10. CAS 3D: RECONSTITUTION DU MOUVEMENT

On a construit un estimation en temps réel de la matrice de rotation qui fonctionne bien. En effet si l'on fait le produit $\hat{R}R^t$ où R est la vraie matrice de rotation on trouve une matrice proche de l'identité: les coefficients diagonaux sont dans $[0.95,1]$ et les autres dans $[0,0.25]$.

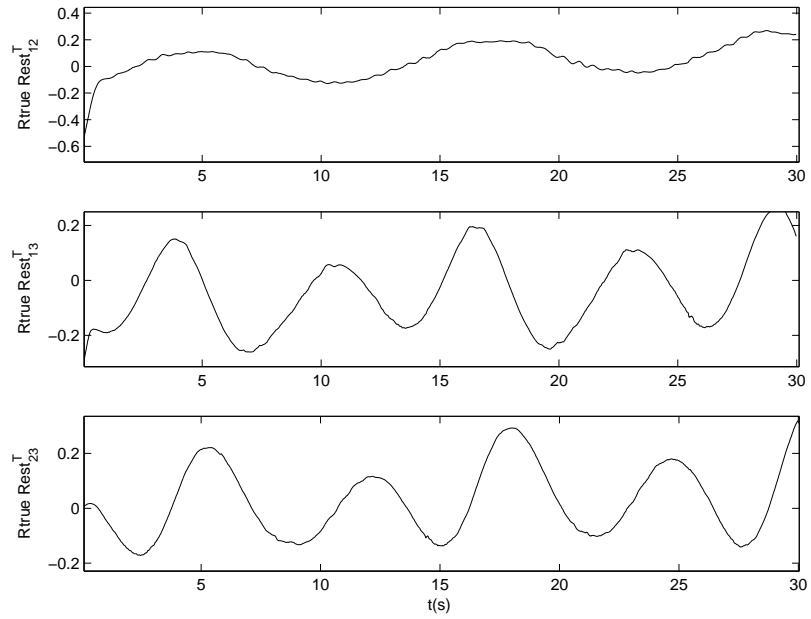


FIGURE 13. coefficients sur-diagonaux de $R_{true} Rest^T$.

On projette maintenant dans le repère fixe l'accélération mesurée à laquelle on a soustrait les biais statiques. On trouve alors une mauvaise estimation de l'accélération sur les axes. (figure 14)

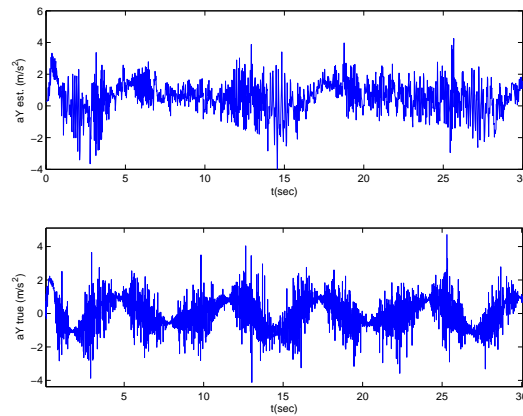


FIGURE 14. projections sur l'axe Y du repère fixe de l'accélération estimée (est.) et comparaison avec l'accélération réelle (true)

Si l'on élimine le bruit, on trouve une erreur maximale entre l'accélération estimée et l'accélération réelle de 1.5 m.s^{-2} . Une telle erreur pendant 1.2s ($t \in [7, 9]$) génère une erreur de 1.7 m sur les positions alors que l'amplitude du mouvement est de 2 m . C'est très mauvais.

Ceci dit, au repos $\vec{a} = \vec{g}$, donc les capteurs sont censés pouvoir osciller correctement autour du point correspondant à une accélération de 10 m.s^{-2} . Or l'erreur maximale sur l'accélération estimée est 1.5 m.s^{-2} et l'erreur moyenne est inférieure à $g/10$. Une erreur de 10% pour les capteurs paraît raisonnable mais suffit à rendre l'estimation de la position dans le cadre de notre expérience très approximative entre deux recalages. (figure 15)

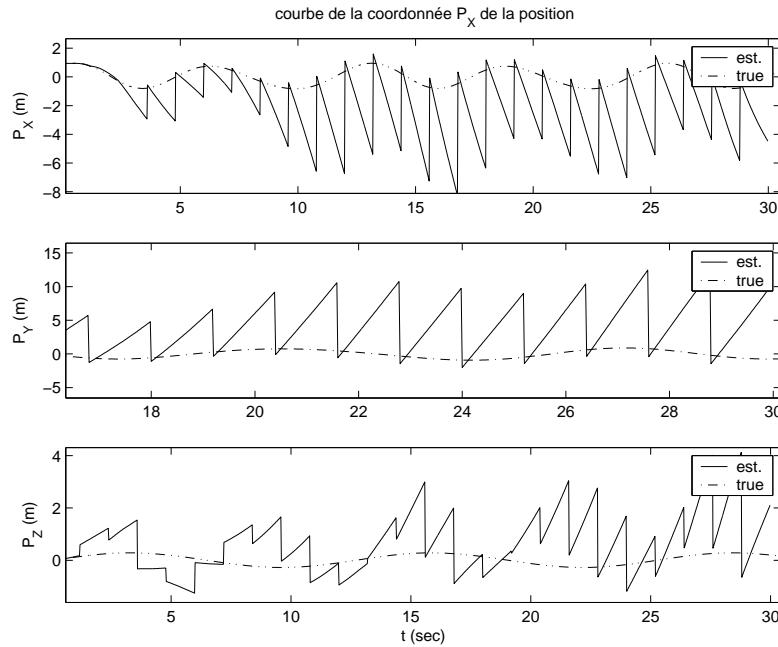


FIGURE 15. courbe de position réelle et estimée avec recalage sur les données GPS

11. CONCLUSION

La centrale a été placée dans des conditions d'accélération relativement faibles car inférieures à g , mais le mouvement est très confiné et la centrale tourne de 180 degrés horizontalement et verticalement toutes les unes ou deux secondes, ce qui paraît un mouvement très extrême pour un hélicoptère par exemple. Il est à noter que la centrale est une centrale bas de gamme. (prix : $2000\text{\$}$)

Malgré cela on arrive à déterminer l'orientation de la centrale avec une erreur de 10%, dans un champ magnétique perturbé, grâce à la construction d'observateurs simples ou à l'utilisation du filtre de Kalman.

C'est un résultat intéressant car il veut dire qu'on peut déterminer la verticale montante à bord du mobile avec une erreur d'angle de 15 degrés. Cela paraît suffisant pour stabiliser un objet volant (éviter qu'il se retourne).

Une précision de l'ordre de 10% sur l'orientation et l'accélération est trop faible pour qu'on puisse estimer correctement la trajectoire du mobile. On ne sait donc pas estimer la position du mobile. Les données GPS toutes les 1.2 s sont la seule information valable sur la trajectoire.

APPENDIX A. FILTRE DE KALMAN

On considère un système dynamique linéaire, d'état x , d'entrée u et de sortie y . On suppose que u s'additionne à la sortie et à l'état deux bruits blancs gaussiens: w et v . Un bruit blanc gaussien est un processus gaussien de moyenne 0 et de fonction de corrélation $\rho(\tau) = W\delta(\tau)$. Le bruit gaussien sur la sortie modélise un bruit sur les mesures issues des capteurs. Le bruit v modélise un "bruit d'état". Pour un avion ce peut être des perturbations atmosphériques par exemple. Les équations s'écrivent

$$(6) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v$$

$$(7) \quad y = Cx + w$$

On suppose que l'état initial x_0 est une variable aléatoire gaussienne.

Kalman a montré que, sous ces conditions, le meilleur estimateur \hat{x} de l'état x est un observateur, c'est à dire une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A(t)\hat{x} + B(t)u + \hat{K}(t)(y - C\hat{x})$$

(où \hat{K} est solution de l'équation de Ricatti). En effet, on cherche à estimer $x(t)$ à partir des données disponibles en sortie $y(\tau)$ pour $\tau \leq t$. Or la variable $\hat{x}(t)$ ($y(\tau), \tau \leq t$)-mesurable à l'instant t qui minimise la matrice conditionnelle de covariance de l'erreur $\tilde{x}(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$ sachant $y(\tau), \tau \leq t$ (le meilleur estimateur) est la variable $\hat{x}(t)$ dont l'espérance coïncide avec celle de $x(t)$ sur tout ensemble ($y(\tau), \tau \leq t$)-mesurable :

$$\hat{x}(t) = \mathbb{E}(x(t) | y(\tau), \tau \leq t)$$

Les équations de Kalman pour \hat{x} ainsi défini montrent que \hat{x} est bien un observateur avec gain $\hat{K}(t)$ dépendant du temps. Voir [1]

Dans le cadre de notre étude, afin de manier des équations plus simples on s'intéresse au système discrétisé obtenu en supposant $A(t)$ et $B(t)$ constants sur le petit intervalle de temps $[kT, (k+1)T]$. On pose

$$\begin{aligned} x_k &= x(kT) \\ A_k &= Id + TA(kT) \\ B_k &= TB(kT) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k v_k \\ y_k &= C x_k + w_k \end{aligned}$$

avec $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ processus gaussiens.

Si l'on appelle donc $\hat{x}_k = \mathbb{E}(x_k | y_1, y_2, \dots, y_k)$, et $\hat{x}_k^- = \mathbb{E}(x_k | y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$, les équations de Kalman donnent

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^- &= A_k \hat{x}_k + B_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- + L_{k+1} (y_{k+1} - C \hat{x}_{k+1}^-) \end{aligned}$$

Il apparaît donc que \hat{x}_k^- est un terme qui correspond à une propagation de l'état du système et que \hat{x}_k est un terme qui correspond au recalage sur la sortie. L'estimateur \hat{x}_k est bien un observateur.

On écrit P_k^- la matrice de covariance de l'erreur a priori, $(P_k^-)_{ij} = cov((\hat{x}_k^- - x)_i, (\hat{x}_k^- - x)_j)$, et P_k la matrice de covariance de l'erreur après recalage, $(P_k)_{ij} = cov((\hat{x}_k - x)_i, (\hat{x}_k - x)_j)$. R est la matrice de covariance du bruit de sortie et Q la matrice de covariance du bruit d'état.

On obtient à partir des formules ci-dessus la matrice de recalage L_{k+1}

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= A_k P_k A_k^T + Q \\ L_{k+1} &= P_{k+1}^- C^T (C P_{k+1}^- C^T + R)^{-1} \\ P_{k+1} &= (I_n - L_{k+1} C) P_{k+1}^- \end{aligned}$$

Dans le cas d'un système non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, les équations du filtre doivent être un peu modifiées (filtre de Kalman étendu).

Si le système non linéaire s'écrit en discret

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k)$$

Alors il faut effectuer dans les deux équations ci-dessus les transformations suivantes

$$\hat{x}_{k+1}^- = f_{k-1}(\hat{x}_k, u_k)$$

Les équations de calcul P_k sont inchangées si l'on prend

$$Ak = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x} \right|_{(\hat{x}_k, u_k)}$$

Remarque: *L'observateur joue bien le rôle de filtre.*

Tout d'abord, on peut faire la différence entre "filters" et "smoothers" (voir [1]). Les filters donnent une estimation de l'état à l'instant t à partir des observations antérieures à l'instant t . Les smoothers donnent une estimation de l'état à partir des observations antérieures et postérieures au temps t .

Les données émanant des capteurs sont bruitées. Dans le cadre de la navigation spatiale, on cherche à estimer la position du mobile afin de la piloter. On a donc besoin de filtrer le signal en temps réel, ce qui veut dire qu'on doit construire un "filter" et non pas un "smoother".

Montrons donc que l'observateur joue le rôle de "filter".

L'observateur vérifie l'équation

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \hat{x} = f(\hat{x}, u) + KC(x - \hat{x})$$

et l'état du système x vérifie l'équation

$$(9) \quad \frac{d}{dt} x = f(x, u)$$

Si l'on appelle e l'erreur $e = x - \hat{x}$, e vérifie l'équation $\dot{e} = [f(x, u) - f(\hat{x}, u)] - KCe$. Sous certaines conditions sur f , on peut prouver la

convergence de l'erreur vers 0. Si l'on suppose que cette preuve est faite, l'observateur \hat{x} converge vers x .

On suppose maintenant que la sortie y est bruitée ($y = Cx + w$). On voit alors que dans l'équation $\frac{d}{dt}\hat{x} = f(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x})$, la forme du second terme $K(y - C\hat{x})$, outre d'être nécessaire à la convergence, permet l'atténuation des hautes fréquences de y (bruit), puisque qu'on passe de y à $C\hat{x}$ par une intégration via \hat{x} .

Néanmoins, on ne peut pas se contenter uniquement du second terme, même s'il joue le rôle filtre.

Prenons un exemple. On suppose que la dimension de l'état et la dimension de la sortie sont 1, et que la dynamique du système est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin t \\ y &= x + w\end{aligned}$$

On pourrait construire un filtre ainsi

$$(10) \quad \frac{d}{dt}\hat{x} = \hat{K}(y - C\hat{x})$$

avec $C=1$. Mais alors le signal filtré serait en retard (maxima décalés) sur y (figure 1). La figure 1 a été obtenue en testant le filtre sur un signal $y(t)$ qui est un cosinus bruité. En effet, pour fixer les idées on peut résoudre l'équation différentielle (7) par la méthode de variation des constantes. La solution s'écrit

$$\hat{x}(t) = [A_0 + \int_0^t \hat{K}y(s) \exp(KCs) ds] \exp(-K Ct)$$

On suppose y assez régulière, \dot{y} bornée et le gain \hat{K} grand et constant. Après intégrations par parties

$$\hat{y} = C\hat{x}(t) = y(t) - \frac{\dot{y}(t)}{\hat{K}C} + A_1 \exp(-\hat{K}Ct) + O\left(\frac{1}{\hat{K}^2}\right)$$

On voit donc que $C\hat{x}(t)$ est en retard d'environ $\tau = 1/\hat{K}C$ sur $y(t)$.

Le premier terme du second membre $f(\hat{x}, u)$ est un terme d'anticipation. Il assure que \hat{x} suit la dynamique du système d'après l'équation (6). Ainsi on évite un retard de \hat{x} sur x et l'estimation est faite en temps réel (figure 2).

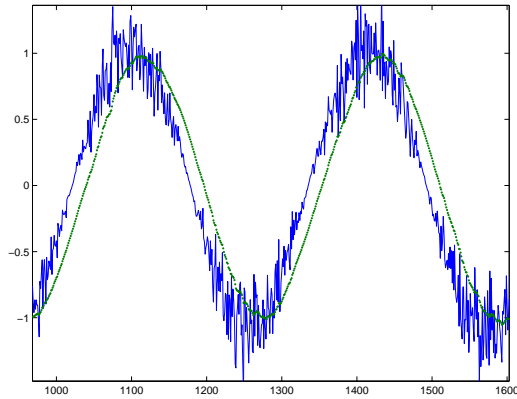


FIGURE 16. filtre (10). $C\hat{x}$ (en points) (estimation), y (bruité) (sortie).

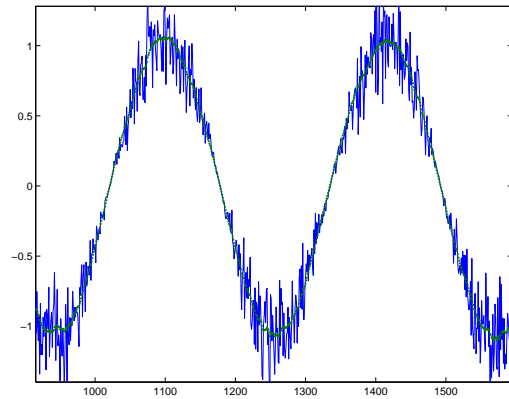


FIGURE 17. filtre (8). $C\hat{x}$ (en points) (estimation), y (bruité) (sortie).

APPENDIX B. QUATERNIONS

L'ensemble des exponentielles complexes $e^{i\theta}$ peut être identifiée au groupe des rotations du plan. Les exponentielles de cette forme sont les complexes de norme 1.

De même, on peut construire l'ensemble des quaternions et établir un lien direct entre les quaternions de norme 1 et les rotations de l'espace.

Définition des quaternions : Nombre complexe, formé de 4 composantes: $q = a + ib + jc + kd$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. i, j, k sont des coefficients imaginaires qui vérifient

$$i = j = k = ijk = -1$$

$$\begin{aligned} ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik \end{aligned}$$

On définit le quaternion conjugué

$$q^* = a - ib - jc - kd$$

Si l'on repère dans l'espace un vecteur par ses coordonnées dans un repère euclidien (b, c, d) , et si q est un quaternion de norme 1 ($q = w + xi + yj + zk$ et $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$), si b', c', d' sont tels que

$$(ib' + jc' + kd') = q^*(ib + jc + kd)q$$

alors (b', c', d') sont les coordonnées du vecteur image du vecteur de coordonnées (b, c, d) par une certaine rotation dont la matrice est donnée par

$$\begin{pmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy + wz) & 2(-wy + xz) \\ 2(xy - wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz + wx) \\ 2(xz + wy) & 2(-wx + yz) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

Par exemple on prend $q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)(ai + bj + kc)$, avec (a, b, c) vecteur unitaire. Alors la rotation qui correspond à ce quaternion est une rotation d'angle θ et d'axe le vecteur (a, b, c) .

On préfère en général aux angles d'Euler les quaternions et aux multiplications par des matrices de rotation des multiplications par des quaternions de norme 1, notamment car cela demande moins de calcul.

Dans notre étude on a repéré l'orientation du mobile par la matrice qui envoie le repère fixe sur le repère mobile. Le passage aux quaternions n'était pas nécessaire au vu de la quantité de calcul à faire. Ceci dit les quaternions ont permis d'améliorer la méthode de discrétisation des équations.

APPENDIX C. DISCRETISATION ET QUATERNIONS

On présente ici un problème qui s'est posé au cours de l'étude.

On cherche à discrétiser l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{c} &= -\omega \hat{s} + K((b_n)_x - \hat{c}) \\ \frac{d}{dt} \hat{s} &= \omega \hat{c} + K((b_n)_y - \hat{s}) \end{aligned}$$

avec un pas de temps T de 0.02 s puisque les données $(b_n)_x$ et $(b_n)_y$ sont disponibles toutes les 0.02 s. 'c' et 's' représentent le cosinus et le sinus de l'angle que fait le champ magnétique avec un certain axe mobile dans le plan

Simplifions le problème. On cherche à discrétiser l'équation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c &= -\omega c \\ \frac{d}{dt}s &= \omega s\end{aligned}$$

on écrit

$$\begin{aligned}c_n &= c(nT) \\ s_n &= s(nT) \\ c_{n+1} &= c_n - T\omega s_n \\ s_{n+1} &= s_n + T\omega c_n\end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -T\omega \\ T\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

La matrice qui fait passer de l'état n à l'état $n+1$ admet une valeur propre strictement supérieure à 1. Donc si le vecteur $\begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonal au vecteur propre qui correspond à cette valeur propre, alors la norme de $\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Sur les simulations, avec un pas de temps de 0.02 s, on voit clairement le cosinus et le sinus diverger au bout de quelques oscillations.

Il convient de faire la discrétisation autrement afin de conserver la norme du vecteur $\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$ égale à 1.

Pendant le temps T , on tourne d'un angle $\simeq T\omega$. On fait donc la discrétisation ainsi en passant aux complexes

$$c_{n+1} + is_{n+1} = e^{i\omega T}(c_n + is_n)$$

CQFD

En trois dimensions tout se passe de la même manière. Par exemple si l'on regarde le vecteur champ magnétique dans le repère mobile, il vérifie l'équation.

$$\frac{d}{dt} \vec{b} = -\vec{\omega} \wedge \vec{b}$$

On voit ici aussi sur les simulations la divergence du schéma

$$\vec{b}_{n+1} = \vec{b}_n - T\vec{\omega} \wedge \vec{b}_n$$

Si l'on ne veut pas que $\|\vec{b}\|$ diverge, il faut discrétiser en faisant effectuer au vecteur champ magnétique \vec{b}_n une rotation d'angle $|\omega|T$ autour du vecteur $-\vec{\omega}$. Ici il n'y a pas besoin d'écrire de matrices de passages et de faire des calculs de changement de repère, si l'on passe aux quaternions. De la même manière que dans le plan on multiplie par $e^{i\omega T}$, ici l'on convertit le quaternion $q = \cos(\omega T/2) + \sin(\omega T/2)(ai + bj + kc)$ en matrice comme dans l'appendix B. On multiplie le vecteur par cette matrice pour passer de l'état n à l'état $n+1$. Le schéma numérique ne diverge plus.

APPENDIX D. REMARQUES SUR LES INTÉGRALES PREMIÈRES ET LES OBSERVATEURS

Pour le cas 2D on a écrit

Si l'on pose $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, les équations de la dynamique du mouvement sont:

$$(11) \quad \frac{d}{dt} c = -\omega(t)s$$

$$(12) \quad \frac{d}{dt} s = \omega(t)c$$

L'observateur de Luenberger s'écrit donc pour ce système

$$\hat{c}(0) = c(0)$$

$$\hat{s}(0) = s(0)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{c} = -\omega \hat{s} + K((b_n)_x - \hat{c})$$

$$\frac{d}{dt} \hat{s} = \omega \hat{c} + K((b_n)_y - \hat{s})$$

Si à $t=0$ on a $c(0)^2 + s(0)^2 = 1$ alors on montre que le vecteur (c,s) reste de norme 1 au cours du temps, si sont vérifiées les équations 11 et 12 ($c^2 + s^2$ intégrale première).

Parcontre $\hat{c}^2 + \hat{s}^2$ ne reste pas constant au cours du mouvement. La dynamique du mouvement ne reste plus sur un cercle. On perd donc une information de structure.

Pour le cas 3D, on remarque que la somme de deux matrices de rotation n'est pas une matrice de rotation, donc $SO(3)$ n'est pas invariant sous l'action du flot de l'équation $\frac{d}{dt}\hat{R} = \hat{R}(\omega \wedge \cdot) + K_\omega(R - \hat{R})$. L'estimateur \hat{R} n'appartient donc pas à $SO(3)$. Un moyen simple de conserver une partie de la structure de $SO(3)$ est de passer aux quaternions. En effet si q est le quaternion des attitudes (on peut associer à tout quaternion une rotation) l'équation s'écrit $\frac{d}{dt}q = 1/2 \hat{q} \omega + K_\omega(q - \hat{q})$. \hat{q} est proche de $SU(2)$, et les quaternions de $SU(2)$ (qu'on peut identifier au groupe des rotations) sont de norme 1. On peut donc associer à \hat{q} le vecteur $\frac{\hat{q}}{\|\hat{q}\|} \in SU(2)$.

REFERENCES

- [1] Mohinder S.Grewal, Abgus P.Andrews. Kalman Filtering. *Wiley Inter-Science*. 2001.
- [2] Brigitte d'Andréa-Novet, Michel Cohen de Lara. Commande linéaire des systèmes dynamiques. *Presses de l'Ecole des Mines*. 2001.
- [3] Pierre Rouchon, Frédéric Bonnans. Cours de l'Ecole Polytechnique: Analyse et Commande de Systèmes dynamiques. <http://cas.ensmp.fr/~rouchon/X03/poly03.pdf> 2003.
- [4] Thèse de Nasradine Aghannan. 2003.

CENTRE AUTOMATIQUE ET SYSTÈMES, ÉCOLE DES MINES DE PARIS, 60 BOULEVARD SAINT-MICHEL, 75272 PARIS CEDEX 06, FRANCE

E-mail address: `silvere.bonnabel@ensmp.fr`